FEUILLE DE TD

E.v. et décomposition polaire

Espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y = 0\right\}$
2. $F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y = 1\right\}$
3. $F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y \geq 0\right\}$
4. $F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\right\}$
5. $F_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\right\}$
6. $F_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{N}\right\}$

---

1. Montrons que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soit $X = (x,y,z) \in F_1$, $X' = (x',y',z') \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
   - $(0,0,0) \in F_1$;
   - $(x+x') - 4(y+y') = (x-4y) + (x'-4y') = 0$ donc $X + X' \in F_1$;
   - $\lambda x - 4\lambda y = \lambda(x-4y) = 0$ donc $\lambda X \in F_1$.
2. Si $X, X' \in F_2$ alors $(x+x') - 4(y+y') = 2$ donc $X + X' \notin F_2$. Donc F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. Si $X \in F_3$ vérifie $x - 4y > 0$ (par exemple : $X = (5,0,1)$), on a : $(-x) - 4(-y) = -(x-4y) < 0$ donc $-X \notin F_3$. Donc F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel.
4. Montrons que F_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soit $X, X' \in F_4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
   - $(0,0,0) \in F_4$;
   - $x + x' = y + y' = z + z'$ donc $X + X' \in F_4$;
   - $\lambda x = \lambda y = \lambda z$ donc $\lambda X \in F_4$.

   F_4 est donc un sous-espace vectoriel, c'est en fait la droite vectorielle $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
5. On a : $(0,1,0) \in F_5$ et $(1,0,0) \in F_5$ mais $(0,1,0) + (1,0,0) = (1,1,0) \notin F_5$. Donc F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel.
6. On a : $(1,0,0) \in F_6$ mais $\frac{1}{2}(1,0,0) = \left(\frac{1}{2},0,0\right) \notin F_6$. Donc F_6 n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 2. Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Soit $F \subset \mathbb{R}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Supposons que $F \neq \{0\}$: il existe $x \neq 0$ tel que $x \in F$. Soit $y \in \mathbb{R}$, alors : $y = \frac{y}{x}.x \in F$. Donc $\mathbb{R} \subset F$, ce qui implique que $F = \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. La famille $((1,2,1),(1,1,3),(3,-2,1))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. La famille $((1,0,3),(0,1,2),(2,-3,0))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

---

1. Soit $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda(1,2,1) + \mu(1,1,3) + \nu(3,-2,1) = 0$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda+\mu+3\nu & =0 & (L_1) \\ 2\lambda+\mu-2\nu & =0 & (L_2) \\ \lambda+3\mu+\nu & =0 & (L_3) \end{array}\right. \underset{\substack{L_2'=L_2-2L_1 \\ L_3'=L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{lll} \lambda+\mu+3\nu & =0 & (L_1) \\ -\mu-8\nu & =0 & (L_2') \\ 2\mu-2\nu & =0 & (L_3') \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3''=L_3'+2L_2'}{\iff} \left\{\begin{array}{lll} \lambda+\mu+3\nu & =0 & (L_1) \\ -\mu-8\nu & =0 & (L_2') \\ -18\nu & =0 & (L_3'') \end{array}\right.$$

$$\iff \lambda = \mu = \nu = 0.$$

   Donc la famille est libre.
2. Soit $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda(1,0,3) + \mu(0,1,2) + \nu(2,-3,0) = 0$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda+2\nu & =0 & (L_1) \\ \mu-3\nu & =0 & (L_2) \\ 3\lambda+2\mu & =0 & (L_3) \end{array}\right. \underset{L_3'=L_3-3L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{lll} \lambda+2\nu & =0 & (L_1) \\ \mu-3\nu & =0 & (L_2) \\ 2\mu-6\nu & =0 & (L_3') \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} \lambda & =-2\nu & (L_1) \\ \mu & =3\nu & (L_2) \end{array}\right. .$$

   Donc si on prend par exemple $\nu = 1$, on a $-2(1,0,3) + 3(0,1,2) + (2,-3,0) = 0$ et la famille est liée.

Exercice 4.
Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $G = \text{vect}\,((1,1,0),(1,0,0))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donner une base de $F \cap G$.

On a $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -x\} = \{(x,-x,z) \mid x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\,((1,-1,0),(0,0,1))$,

donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
De plus $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. En effet, tout élément de G a une troisième coordonnée nulle. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $z = 0$, alors $(x, y, 0) = y(1, 1, 0) + (x - y)(1, 0, 0) \in G$.
Finalement, $(x, y, z) \in F \cap G \iff x + y = 0$ et $z = 0$. Donc $F \cap G = \text{vect}\,((1, -1, 0))$.

Exercice 5.
Soit $\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On montre comme d'habitude que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont stables par combinaison linéaire.
Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = -f(x)$ et donc $f = 0$. Donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont en somme directe.
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Alors g est paire, h est impaire et $g + h = f$. Donc $\mathcal{P} + \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. A-t-on nécessairement $H \cap (F + G) = (H \cap F) + (H \cap G)$?

- L'inclusion $(H \cap F) + (H \cap G) \subset H \cap (F + G)$ est toujours vraie. En effet, soit $x = u + v \in (H \cap F) + (H \cap G)$ avec $u \in H \cap F$ et $v \in H \cap G$. Alors $u, v \in H$ donc $x \in H$ et $u \in F$, $v \in G$ donc $x \in F + G$.
- Prenons dans $\mathbb{R}^2$ les sous-espaces $F = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $G = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $H = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Alors $F + G = \mathbb{R}^2$ et donc $H \cap (F + G) = H$. Or $H \cap F = H \cap G = \{0\}$ donc $(H \cap F) + (H \cap G) = \{0\}$.

Exercice 7. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \subset H$. Montrer que $H = F \oplus (G \cap H)$.

- Montrons que F et $G \cap H$ sont en somme directe : soit $x \in F \cap G \cap H$ alors $x \in F \cap G = \{0\}$ donc $x = 0$.
- Soit $x \in F + (G \cap H)$: il existe $u \in F$ et $v \in G \cap H$ tels que $x = u + v$. $F \subset H$ donc $u \in H$ et $v \in H$ donc $x \in H$. D'où : $F + (G \cap H) \subset H$.
- Soit $x \in H$. Puisque $H \subset E = F + G$, il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $x = u + v$. Or $u \in F \subset H$ donc $v = x - u \in H$ et donc $v \in G \cap H$. Donc $H \subset F + (G \cap H)$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$?

La famille $((1, 0, \ldots, 0), (i, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1), (0, \ldots, 0, i))$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$. Donc $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$.
On va montrer dans le cours 5 la formule $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$, ce qui nous donne ici $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = n \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2n$.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim E = n$.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

---

1. La formule de Grassmann donne
$$\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim(F + G) > n - \dim(F + G) \geq 0.$$
Donc $\dim F \cap G > 0$, c'est-à-dire $F \cap G \neq \{0\}$.
2. On a $n - 1 \leq \dim(H_1 + H_2) \leq n$.
   - Si $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$, on a H_1 et H_2 des sous-espaces vectoriels de $H_1 + H_2$ avec $\dim H_1 = \dim H_2 = \dim(H_1 + H_2)$. Donc $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$, ce qui est exclu.
   - On a donc $\dim(H_1 + H_2) = n$ et donc $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2$.

Exercice 10. On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_k : x \mapsto \sin(kx)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Montrons la propriété par récurrence sur n.

- **Initialisation :** Si $n = 1$, la famille (f_1) est libre car f_1 n'est pas la fonction nulle.
- **Hérédité :** Soit $n \geq 1$, supposons que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \sin(kx) = 0. \tag{1}$$

Dérivons deux fois cette égalité : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \lambda_k \sin(kx) = 0. \tag{2}$$

Faisons la différence (2)$-(n+1)^2$(1) : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k^2 - (n+1)^2)\lambda_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - (n+1)^2)\lambda_k \sin(kx) = 0.$$

Or par hypothèse de récurrence, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, donc on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Il reste donc $\lambda_{n+1} f_{n+1} = 0$ et donc $\lambda_{n+1} = 0$.

Exercice 11. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère :

$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire de E.

- La fonction nulle appartient à F et par linéarité de l'intégrale, F est stable par combinaison linéaire. Donc F est un sev de E.
- On note G l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. C'est un sous-espace vectoriel de E.

  Soit $f \in F \cap G$. La fonction f est constante égale à $a \in \mathbb{R}$. De plus, $a = \int_0^1 f(t)dt = 0$. Donc la fonction f est la fonction nulle. D'où $F \cap G = \{0\}$.

  Soit $f \in E$. On note g la fonction constante qui à tout t associe $\int_0^1 f(t)dt$ et $h = f - g$. Par construction, la fonction appartient à G, la fonction h appartient à F et $f = h + g$. D'où $F \oplus G = E$.

  Finalement, F et G sont supplémentaires.

Exercice 12.
Pour a, $b \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_{a,b} : x \mapsto a\cos(x+b)$. Soit $E = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et en donner une base.

- Soient $(a,b), (a',b') \in \mathbb{R}^2$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) + f_{a',b'}(x) &= a\cos(x+b) + a'\cos(x+b') \\ &= a\left(\cos x \cos b - \sin x \sin b\right) + a'\left(\cos x \cos b' - \sin x \sin b'\right) \\ &= \cos x \left(a\cos b + a'\cos b'\right) - \sin x \left(a \sin b + a' \sin b'\right). \end{aligned}$$

  Soit $A = (a\cos b + a'\cos b')$, $B = (a\sin b + a'\sin b')$ et $C = \sqrt{A^2+B^2}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta = \frac{A}{C}$ et $\sin\theta = \frac{B}{C}$. On obtient alors

$$f_{a,b}(x) + f_{a',b'}(x) = C\left(\cos x \cos\theta - \sin x \sin\theta\right) = C\cos(x+\theta) = f_{C,\theta}(x).$$

  Donc E est stable par addition. De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda f_{a,b} = f_{\lambda a, b}$. Enfin, la fonction nulle appartient à E. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- On a vu que toute fonction $f_{a,b}$ est combinaison linéaire de cos et sin. Or la famille $(\cos, \sin)$ est libre donc c'est une base de E.

Exercice 13. Soit $H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x+y+z+t = 0\right\}$ et $e = (1,1,1,1)$.

1. Donner une base du sous-espace vectoriel H et sa dimension.
2. Montrer que H et $\mathrm{vect}(e)$ sont supplémentaires.
3. Si $a \in \mathbb{K}^4 \setminus H$, montrer que H et $\mathrm{vect}(a)$ sont encore supplémentaires.

---

1. On a

$$\begin{aligned} H &= \{(x,y,z,t) \mid t = -x-y-z\} \\ &= \{(x,y,z,-x-y-z) \mid x,y,z \in \mathbb{K}\} \\ &= \{x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1) \mid x,y,z \in \mathbb{K}\} \\ &= \mathrm{vect}\left((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\right). \end{aligned}$$

   Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$ engendré par la famille $((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$. On peut montrer que cette famille est libre, c'est donc une base de H. On a ainsi $\dim H = 3$, c'est-à-dire que H est un hyperplan de $\mathbb{K}^4$.

2. On a $\mathrm{vect}(e) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x=y=z=t\right\}$ donc $H \cap \mathrm{vect}(e) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } x=y=z=t\right\} = \{0\}$. Donc H et $\mathrm{vect}(e)$ sont en somme directe.

   Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4$, on cherche $\lambda, \mu, \nu, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \lambda & & & +\gamma & = x & (L_1) \\ & \mu & & +\gamma & = y & (L_2) \\ & & \nu & +\gamma & = z & (L_3) \\ -\lambda & -\mu & -\nu & +\gamma & = t & (L_4) \end{cases} \underset{L_4'=L_1+L_2+L_3+L_4}{\iff} \begin{cases} \lambda & = x-\gamma & (L_1) \\ \mu & = y-\gamma & (L_2) \\ \nu & = z-\gamma & (L_3) \\ 4\gamma & = x+y+z+t & (L_4') \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda & = \frac{3x-y-z-t}{4} \\ \mu & = \frac{-x+3y-z-t}{4} \\ \nu & = \frac{-x-y+3z-t}{4} \\ \gamma & = \frac{x+y+z+t}{4} \end{cases}.$$

Le système a une solution donc $H + \mathrm{vect}(e) = \mathbb{K}^4$.

3. Si $a \notin H$ alors $H \cap \mathbb{K}a = \{0\}$, c'est-à-dire que H et $\mathbb{K}a$ sont en somme directe, et donc $\dim(H \cap \mathbb{K}a) = 0$. D'après la formule de Grassmann, on a alors $\dim(H + \mathbb{K}a) = 4 = \dim \mathbb{K}^4$. Donc H et $\mathbb{K}a$ sont supplémentaires. *On aurait pu utiliser cet argument dans la question précédente !*

Exercice 14. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.

Supposons que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ n'est pas une base.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. La famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ contient n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n et n'est pas une base. Donc elle liée. Or la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre. Donc e'_j peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$.

On peut faire ce raisonnement pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ donc tous les vecteurs de la base $(e'_1, \dots, e'_n)$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$. La famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est donc génératrice, ce qui est absurde car $\dim E = n$.

Donc il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ est une base.

Exercice 15. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des nombres distincts deux à deux. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $f_i : x \mapsto e^{\lambda_i x}$.
Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, en utilisant les résultats sur les espaces vectoriels.
En utilisant les résultats sur la réduction, et avec $D : f \mapsto f'$, montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Avec les espaces vectoriels, cette preuve se fait par récurrence sur $n \geq 1$.
Il faut considérer une combinaison linéaire des f_i qui est nulle, dériver la combinaison linéaire, et combiner les deux égalités.

Preuve avec les résultats de réduction : Prenons $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ comme espace vectoriel. La fonction $D : f \mapsto f'$ est une application linéaire sur E. De plus, on a $D(f_i) = \lambda_i f_i$, donc les f_i sont des vecteurs propres de D de valeur propre associée λ_i.
Or, une famille de vecteurs propres associées à des valeurs propres différente est libre, donc cette famille est libre.
Cela découle du théorème des noyaux : Les noyaux $Ker(D - \lambda_i Id_E)$ sont en somme directe, et on a $f_i \in Ker(D - \lambda_i Id_E)$.

■ *Dev : Décomposition polaire* ■

Exercice 16 (Décomposition polaire). Soient $n \geq 1$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. **Existence et unicité :**
   (a) Montrer que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
   (c) On pose $O = AB^{-1}$. Montrer que $O \in O_n(\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que la matrice B est unique. On utilisera de la diagonalisation simultanée.
   On notera par la suite $B = |A|$.
   (e) En déduire que pour tout $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, $\exists!(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ t.q. $A = OS$.
   (f) On pose $f : (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto OS \in Gl_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que la fonction f est bijective, et donner une expression de sa bijection réciproque f^{-1}.
2. **Continuité :**
   On munit $M_n(\mathbb{R})$ (et ses sous-ensembles) d'une norme $\|.\|$. Montrer que la fonction f est continue.
3. **Compacité :**
   Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.
4. **Homéomorphisme :**
   (a) Soit $(A_n)_n \in Gl_n(\mathbb{R})$ une suite qui converge vers $A \in Gl_n(\mathbb{R})$. On pose $A_n = O_nS_n$, et $A = OS$. On veut montrer que $O_n \to_n O$ et que

$S_n \to_n S$.
Montrer qu'il existe une sous-suite $(O_{n_k})_k$ de $(O_n)_n$ qui est convergente.

(b) Montrer que $\lim_k (O_{n_k}) = O$.

(c) Montrer que la suite $(O_n)_n$ est convergente vers O. On pourra raisonner par l'absurde.

(d) En déduire que la suite S_n est convergente vers S.

(e) Montrer que la fonction f est un homéomorphisme de $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ vers $Gl_n(\mathbb{R})$.

■ *Dev : Enveloppe convexe de* $O_n(\mathbb{R})$ ■

Exercice 17 (Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$). Soit $n \geq 1$. On note $|||.|||_2$ la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.
L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de $O_n(R)$ (des $\sum_{i=1}^m t_i O_i$ avec $O_i \in O_n(\mathbb{R})$ et $t_i \in [0,1]$ t.q. $t_1 + \ldots + t_m = 1$).
On veut montrer que l'adhérence de l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$, $\overline{Conv(O_n(\mathbb{R})}$, est exactement la boule unité fermée pour $|||.|||_2$.

1. **Convexe compact :**
   (a) On rappelle que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact. Montrer que $\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}$ est encore un ensemble convexe.
2. **Première inclusion :**
   (a) Soit $O \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|||O|||_2 = 1$.
   (b) Montrer que $\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))} \subset B(O,1)$, la boule unité fermée pour $|||.|||_2$.
3. **Séparation par les formes linéaires :** Soit $M \notin Conv(O_n(\mathbb{R}))$.
   Déterminer une forme linéaire $\phi \in M_n(\mathbb{R})^*$ telle que $\phi(M) > \sup_{\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}}(\phi(O))$. On pourra utiliser un projeté orthogonal.
4. **Inclusion réciproque :** Soient maintenant $N \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $|||N|||_2 \leq 1$, et soit $\psi \in M_n(\mathbb{R})^*$.
   On veut montrer que $\psi(N) \leq \sup_{\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}}(\psi(O))$.
   Démontrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi(.) = M \mapsto Tr(AM)$.
5. Il faut donc démontrer que $Tr(AN) \leq \sup_{\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}}(Tr(AO))$.
   Décomposition polaire généralisée :
   (a) On suppose A inversible. Montrer qu'il existe $\Omega \in On(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = \Omega S$.
   (b) On suppose A non-inversible. Montrer qu'il existe $\Omega \in On(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = \Omega S$. On pourra utiliser la densité de $Gl_n(\mathbb{R})$.
6. Montrer que l'on a $\sup_{\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}}(Tr(AO)) \geq Tr(S)$.
7. La matrice $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ? Dans quel type de base ? Dans quel ensemble sont situées ses valeurs propres ?
8. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une b.o.n de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
   (a) Exprimer $Tr(S)$ en fonction des λ_i.
   (b) Montrer que $Tr(AN) \leq \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_2 |||{}^tN|||_2 \|e_i\|_2$.
   (c) Montrer que $Tr(AN) \leq \sum_{i=1}^n \|Se_i\|_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.
9. **Conclusion :**
   En déduire que $Tr(AN) \leq \sup_{\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}}(Tr(AO))$.
10. Montrer que $N \in \overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}$.

Remarque : Dans un ev de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est fermée. On a en fait $\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))} = Conv(O_n(\mathbb{R}))$.
Cependant démontrer ce fait n'est pas immédiat (il faut arriver à utiliser l'hypothèse de dimension finie), et c'est pourquoi cet exercice n'en tient pas compte. Mais, on peut très bien l'admettre et dès le début regarder uniquement l'enveloppe convexe.